数理解析研究所講究録
254巻 1975年 41-62

微分可能な力学系の生成的性質について

名大 教養部 白岩謙一
池上宜弘

§0. 序. 微分可能な力学系の理論において，生成的性質の研究は最も重要であった. ここでは，現在までに知られている生成的性質について概観する. 第一章では一般の力学系に関する生成的性質について，第二章では保存系に関する生成的性質について述べる. Baire空間の要素に関する性質Pが生成的であるとは，適当なBaire集合があって，その各要素に対してPが成立することである.

第一章. 一般の微分可能な力学系について.

§1. Kupka-Smale の定理.

MをC^∞多様体とする. $\mathcal{D}^r(M)$をM上のC^r級微分同相写像全体にWhitney位相を入れた空間とし，$\mathcal{X}^r(M)$をM上のC^r級ベクトル場全体にWhitney C^r位相を入れた空間とする. $\mathcal{D}^r(M)$, $\mathcal{X}^r(M)$は$1 \leqq r \leqq \infty$でBaire空間である.

xを$f \in \mathcal{D}^r(M)$の不動点とする．xが双曲型であるとは，$T_x f: T_x(M) \to T_x(M)$ の固有値の絶対値が皆1とならないことである．fの周期点xが双曲型であるとは，xの基本周期をpとするときxはf^pの双曲型不動点であることである．xを$X \in \mathfrak{X}^r(M)$の特異点($X_x = 0$)とする．$\exp(T_x X)$ の固有値の絶対値が皆1とならないときxが双曲的であるという．γを周期τのXの閉軌道とするとき，γが双曲的であるとは，γ上の点xに於て，$T_x \varphi_\tau$の固有値の絶対値が軌道方向の固有値の他は1とならないことである．但し，φ_tはXに対応する流れとする．Xの特異点と閉軌道をXの critical element という．

$x \in M$を通るfの安定集合$W_f^s(x)$，不安定集合$W_f^u(x)$は次のように定義される．dを任意に与えたMの距離とするとき，

$$W_f^s(x) = \{y \in M \mid \lim_{n \to \infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0\},$$

$$W_f^u(x) = \{y \in M \mid \lim_{n \to \infty} d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) = 0\}.$$

$X \in \mathfrak{X}^r(M)$に対する$W_X^s(x)$, $W_X^u(x)$ は次のように定義される，

$$W_X^s(x) = \{y \in M \mid \lim_{t \to \infty} d(\varphi_t(x), \varphi_t(y)) = 0\},$$

$$W_X^u(x) = \{y \in M \mid \lim_{t \to \infty} d(\varphi_{-t}(x), \varphi_{-t}(y)) = 0\}.$$

ΛをMの部分集合とするとき，力学系f又はXに対するΛの安定・不安定集合は，$W^s(\Lambda) = \bigcup_{x \in \Lambda} W^s(x)$，$W^u(\Lambda) = \bigcup_{x \in \Lambda} W^u(x)$ により定義される．

fの周期点xが双曲型ならば$W_f^s(x)$, $W_f^u(x)$ は euclidean space

をinjectiveにC^r immerseした多様体で[3], Xのcritical elementが双曲型ならば$W^s_X(\gamma)$, $W^u_X(\gamma)$ (xは$W^s_X(x)$, $W^u_X(x)$)はinjectiveにC^r immerseされた多様体である[30].

<u>定理</u>1. (Kupka-Smaleの定理). [5], [30], [15].

$r \geqq 1$とするとき, $\mathcal{D}^r(M)$, $\mathfrak{X}^r(M)$に於ける次の性質は生成的である. (Mはnoncompactでもよい.)

(i) 全ての不動点, 周期点; critical elementは双曲型.

(ii) 全ての不動点, 周期点; critical elementのW^sやW^uは全て互に横断的交わりを持つ.

§2. Closing lemmaとその応用.

<u>定理</u>2. (Closing lemma [18]).

Mをcompact, $X \in \mathfrak{X}^1(M)$, xはXの非遊走集合$\Omega(X)$の点とする. このとき$\mathfrak{X}^1(M)$に於て, Xに任意の近くにYが存在して, xはYの閉軌道に含まれる.

次の$\mathcal{D}^1(M)$に関するclosing lemmaは[20]の結果より導くことができる.

<u>定理</u>2'. Mをcompact, $f \in \mathcal{D}^1(M)$, $x \in \Omega(f)$とする. このとき, $\mathcal{D}^1(M)$に於てfに任意の近くにgが存在して, xはgの周期点となる.

C^2級のclosing lemmaは期待できないようである[19].

closing lemma より次の定理が導かれる. $\Omega(X)$, $\Omega(f)$ は各々 X, f の非遊走集合としている. 又 $\Gamma(X)$, $\Gamma(f)$ を各々 X の critical element に含まれる点の集合, f の不動点, 周期点の集合とする.

定理3. (General density theorem [18]). M を compact とするとき $\mathfrak{X}^1(M)$ に於て $\Omega(X)=\overline{\Gamma(X)}$ なる性質は生成的である.

定理3'. ([20]) M を compact とするとき, $\mathfrak{D}^1(M)$ に於て $\Omega(f)=\overline{\Gamma(f)}$ は生成的に成立する.

$X \in \mathfrak{X}^1(M)$ の第1積分とは, 次の条件をみたす C^r 級の関数 $f: M \to R$ である; (i) r は M の次元, (ii) M の任意の開集合上で f は定数ではない, (iii) $L_X f = 0$ (即ち X の流れは f を保存する.).
次の定理も closing lemma を使って証明された.

定理4. (Peixoto [16]). M が compact のとき, $\mathfrak{X}^1(M)$ に於て, 生成的に X は第1積分を持たない.

第1積分に関しては Arraut [2] の結果がある.

§3. 構造安定性, Ω-爆発.

構造安定性の概念ができた頃より, これは生成的かという事が問題となった. $\mathfrak{X}^r(M)$ では M が compact 2次元のときは生成的であり, $\mathfrak{D}^r(M)$ では $M=S^1$ のときは生成的である ([19]). 一方, 2次元以上の non-compact 多様体では, 構造安定でないよう

なベクトル場からなる開集合が$\mathfrak{X}^r(M)$に存在する([17]). 又Mが2次元以上でcompactならば常に$\mathfrak{D}^r(M)$に構造安定でない要素からなる開集合が存在する.

構造安定性を特徴づけようという試みからSmaleが定義した次の概念がある.

<u>*Axiom A.*</u>

(a) Ωは双曲型集合である. この意味は$f \in \mathfrak{D}^r(M)$の場合は$T(M)|\Omega = E^u \oplus E^s$なるsplittingが存在し, $X \in \mathfrak{X}^r(M)$の場合はΩ_0を特異点の集合, Ω_1を$\Omega(X) - \Omega_0$とするとき, $T(M)|\Omega_0 = E^u \oplus E^s$, $T(M)|\Omega_1 = E^u \oplus E^s \oplus E^X$なるsplittingが存在することである. 但し$t>0$, $n>0$に対してTf, $T\varphi_t$はE^uではexpandし, E^sではcontractする. そしてE^Xはベクトル場Xで張られるものとする.

(b) $\Omega = \overline{\Gamma}$.

<u>ST. (Strong transversality property)</u>: 任意の$x \in M$に対して, $W^s(x)$と$W^u(x)$は横断的交わりを持つ. (Axiom Aのもとでは$W^s(x)$, $W^u(x)$はimmerseされた多様体である.)

構造安定性については次の結果が得られている. 定理5の$2 \leqq r \leqq \infty$は[22], $r=1$は[24]の結果であり, 定理5′は[25]の結果である.

<u>定理</u>5. Mがcompact, $1 \leqq r \leqq \infty$とする. $f \in \mathfrak{D}^r(M)$がAxiom

A と ST をみたせば, f は $\mathcal{D}^r(M)$ の中で構造安定である.

<u>定理</u> 5'. M を compact とする. $X \in \mathcal{X}^r(M)$ が Axiom A と ST をみたせば, X は $\mathcal{X}^r(M)$ の中で構造安定である, $r \geqq 1$.

他に compact や open 多様体上の力学系の Ω-構造安定性に関しての仕事[31], [21], [8] 等がある.

<u>定理</u> 6. (Shub [26]) M を compact とするとき, $\mathcal{D}^r(M)$ の中で構造安定な $f \in \mathcal{D}^r(M)$ は $\mathcal{D}^0(M)$ の中に稠密に存在する.

次に Ω-爆発について述べる.

<u>定義</u>. $f \in \mathcal{D}^r(M)$, $0 \leqq r \leqq \infty$, の *filtration* とは境界を持つ多様体の列 $M = M_k \supset \cdots \supset M_0 = \phi$ で $f(M_i) \subset \mathrm{Int}\, M_i$, $\mathrm{Int}\, M_i \supset M_{i-1}$ をみたすものである. C^0 位相で f に近い g は f と同じ filtration を持つ. $K_i = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(M_i - \mathrm{Int}\, M_{i-1})$ は $M_i - M_{i-1}$ に含まれる最大の不変集合である. 特に $K_i = \Omega(f) \cap (M_i - M_{i-1})$ のとき, この filtration は <u>fine</u> であるという.

Ω の分解 $\Omega = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_k$ で, 次の条件をみたすものを <u>Ω-分解</u>という; (i) $\forall\, \Omega_i$ は閉不変集合, (ii) $\Omega_i \cap \Omega_j = \phi$ $(i \neq j)$, (iii) Ω_i は topologically transitive. $(W^u(\Omega_i) - \Omega_i) \cap (W^s(\Omega_j) - \Omega_j) \neq \phi$ のとき $\Omega_j < \Omega_i$ と書く. そして, $\Omega_{i_0} < \Omega_{i_1} < \cdots < \Omega_{i_\ell} = \Omega_{i_0}$ $(\ell \geqq 1)$ なる ($\Omega_{i_0}, \cdots, \Omega_{i_\ell}$) を <u>cycle</u> という.

<u>定理</u>. [27] $f \in \mathcal{D}^r(M)$ が fine filtration を持つための必要十

分条件は，f がcycleのないΩ-分解を持つことである．

f のfiltrationの列 $\{M=M^\alpha_{k_\alpha}\supset\cdots\supset M^\alpha_1\}_{\alpha=1,\cdots,n}$ が<u>fine sequence of filtration</u>であるとは，(i) $\forall i\ \exists j\ M^\alpha_i - M^\alpha_{i-1}\subset M^{\alpha-1}_j - M^{\alpha-1}_{j-1}$，(ii) $\bigcap_{\alpha>0}K^\alpha=\Omega(f)$，(但し，$K^\alpha_i$ を上の K_i と同様なものとするとき，$K^\alpha=\bigcup_i K^\alpha_i$ とする.)　f が C^r <u>Ω-爆発</u>を持たないとは，任意の開近傍 $U(\Omega(f))$ に対して，f の近傍 $N(f)\subset\mathcal{D}^r(M)$ が存在して，任意の $g\in N(f)$ に対して $\Omega(g)\subset U(\Omega(f))$ であることである．

<u>定理</u>[28]．$f\in\mathcal{D}^0(M)$ が C^0 Ω-爆発を持たないための必要十分条件は f がfine sequence of filtrationを持つことである．

<u>定理7</u>.（Palis-Shub-Sullivan[13]）．$\dim M\neq 4$ のとき，$\mathcal{D}^0(M)$ の中でfine sequence of filtration を持つもの（従って C^0 Ω-爆発を持たないもの）は生成的に存在する．

次に ζ-関数について述べる．$f\in\mathcal{D}^r(M)$ に対して $N_p(f)$ を f^p の不動点の個数とする．このとき f の<u>ζ-関数</u>は $\zeta(f,t)=\exp\left(\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p}N_p(f)t^p\right)$ で定義される．Manningは[6]に f がAxiom Aをみたせば ζ は有理関数であることを示した．一方Simonは $\mathcal{D}^r$(3-torus) の中では，ζ が有理関数であるようなものは生成的でない事を示した[29]．

§4. Bifurcation.

$\Xi^r(\Lambda)$ を多様体 Λ から $\mathfrak{X}^r(M)$ への C^r 写像 ξ の全体に C^r 位相を入れた空間とする。但し，ξ が C^r 級であるとは $\hat{\xi}(x,\lambda)=\xi(\lambda)(x)$ が $M\times\Lambda$ 上で C^r 級であることである。$\Sigma(\xi)\subset\Lambda$ を $\xi(\lambda)$ が構造安定なベクトル場であるような λ の全体から成る部分集合とする。このとき $\Lambda-\Sigma(\xi)=\Lambda_1(\xi)$ を ξ の *bifurcation set* という。$\xi(\lambda_1)$ と $\xi(\lambda_2)$ が位相的に同値でないような２つの構造安定な族の中にあるときは $\lambda\in\Lambda$ が存在して $\xi(\lambda)$ は構造安定でなくなる。しかも $\Xi^r(\Lambda)$ の中で ξ を少々動かしても同じことがなりたつ。このように bifurcation を除くことができなくても，bifurcation のきれいな表現（しかも生成的に存在するようなもの）を探すことを目的とする。ここでは，この様な目的で力学系の bifurcation を取扱かったものの中で代表的なものを紹介し，他の文献も掲げておく。

次に示すのは [32] の一般化である Sotomayor [33] の結果である。

力学系の不動点，周期点，特異点，周期軌道が双曲型でない場合，力学系はこれ等の近くで局所的に安定でない。x を M の C^r 級微分同相写像 f の不動点とする。T_xf を保つ T_xM の splitting $E^c\oplus E^u\oplus E^s$ が存在して，$T_xf|E^c$, $T_xf|E^u$, $T_xf|E^s$ の固有値の絶対値は各々 1，>1，<1 となる。（$E^c=\{0\}$ のとき x は双曲型となる。）　すると局所部分多様体 W^c, W^{cu}, W^{cs} が存在し

て, f-invariant で x に於て各々 E^c, $E^c \oplus E^u$, $E^c \oplus E^s$ に接する. これ等は一意的には存在しないが, どの様に取っても x に於て r 次の contact を持つ. 又 E^u, E^s に x で接する局所多様体 W^{uu}, W^{ss} が一意的に存在する.

x が<u>準双曲型</u>(quasi-hyperbolic) であるとは, ある W^c に対して, $f|W^c$ が次のうちの 1 つの写像と C^r conjugate となること;

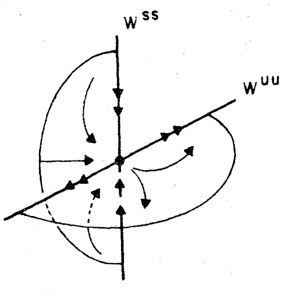
(a) $x \longmapsto x + ax^2 + o(x^2)$, $a \neq 0$, x は十分小さい実数,

(b) $x \longmapsto -x + \alpha x^2 + \gamma x^3 + o(|x|^3)$, $\gamma + \alpha^2 \neq 0$, x は十分小,

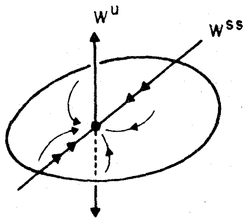
(c) $z \longmapsto \lambda z + \beta |z|^2 z + o(|z|^3)$, $\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4 \neq 1$, $Re(\frac{\beta}{\lambda}) \neq 0$,

z は十分小さい複素数とする. ($|\lambda| = 1$).

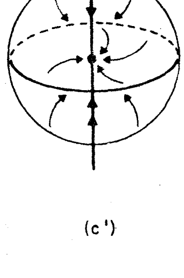
(b) に於て $\gamma + \alpha^2 > 0$ ならば $f|W^c$ は x に向う attractor となり, (c) に於て $Re(\frac{\beta}{\lambda}) < 0$ ならば $f|W^c$ は attractor となる. 次に 3 次元の場合の図の例を示しておく.



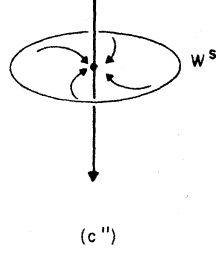
(a)



(b)



(c')



(c'')

xをMのベクトル場Xの特異点とするとき，xが準双曲型であるとは，ある$t>0$に対してxが$\varphi_t: M\to M$の準双曲型不動点となることである（但しφ_tはXの流れとする）。同様にXの周期軌道γが準双曲型であるとは$x\in\gamma$がγのPoincaré写像の準双曲型不動点となることである．

$\Theta(\xi)=\{(x,\lambda)\in M\times\Lambda \mid x$は$\xi(\lambda)$の準双曲型critical elementに入っている$\}$とおくとき，$S_1(\xi)$をprojection $M\times\Lambda\to\Lambda$による$\Theta(\xi)$の像とする．このとき，次はSotomayorの結果である．

<u>定理</u> 8. Λをcompact 1次元多様体とするとき，$\Gamma^r\ (r\geqq 5)$を次の条件を持つ$\xi\in\mathfrak{X}^r(\Lambda)$の全体とすれば，$\Gamma^r$は$\mathfrak{X}^r(\Lambda)$の中のBaire集合である．(1). $\xi(\lambda)$は任意の$\lambda\in\Lambda$に対して双曲型又は準双曲型のcritical elementしか持たない．しかも準双曲型のcritical elementはある横断性に関する条件をみたす．
(2). 準双曲型のcritical elementsに対する$S_1(\xi)$は互に交わらない．

詳しくは，この講究録の中の，松元重則「力学系の分岐」を参照されたい．

他に微分同相写像のbifurcationの生成的性質に関する[9]，[10]などの最近の結果がある．

§5. 生成的性質に関する予想．

<u>予想</u> 1. (Smale 1971). 全ての安定集合$W^s(x)$がなめらかな多様体であることは$\mathfrak{D}^r(M)$, $\mathfrak{X}^r(M)$で生成的である.

<u>予想</u> 2. (Shub-Smale [28]). 微分同相写像の fine sequence of filtration は生成的に存在する.

次に Lyapunov 関数について述べる. 任意の$f: M \to \mathbb{R}$は nondegenerate な特異点しか持たないような$\bar{f}$で近似できるが更に少し動かして, $\bar{f}$に対して$-\mathrm{grad}\,\bar{f}$は閉軌道を持たない Morse-Smale ベクトル場となるようにできる. このとき, $-\mathrm{grad}\,\bar{f}$は構造安定になる. この様な考え方を発展させたものを次に紹介する. φ_tをXの流れとする.

$X \in \mathfrak{X}^r(M)$, ΛをXの不変閉集合とする. このとき$L_X: M \to \mathbb{R}_+$が次の条件を持つとき<u>(X, Λ)に対する Lyapunov 関数</u>であるという; L_Xの critical set $= \Lambda$, $M - \Lambda$上で$\langle \mathrm{grad}\, L_X, X \rangle < 0$ (適当なMの Riemannian metric に対して), そしてL_Xは少くとも$C^{\dim M}$級である. 特に$\Lambda = \Omega(X)$のとき単に<u>Xに対する Lyapunov 関数</u>という.

なめらかな境界を持つ部分多様体の列$\phi = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_k = M$が次の条件を持つとき流れ<u>$\varphi_t$の filtration</u> という; $M_i \subset \mathrm{Int}\, M_{i-1}$, $\varphi_t(M_i) \subset \mathrm{Int}(M_i)$ $\forall t > 0$, $\varphi_t(x)$は∂M_iと横断的に交わる$\forall x \in M$, $0 < i < k$. filtration が$K_i = \bigcap_{t>0} \varphi_t(M_i - M_{i-1}) =$

$\Omega(X)\cap(M_i-M_{i-1})$ をみたすとき<u>fine</u>であるという.

<u>定理</u>[21]. $K=\bigcup_{i=1}^{k}K_i$ とする. このとき(X,K)のC^∞級のLyapunov関数で $L_X(K_i)=i$ となるものが存在する.

又この定理から次が得られる.

<u>定理</u>[21]. XがAxiom A をみたし, cycle を持たないならばC^∞級のLyapunov関数で有限個の特異値しか持たないものが存在する.

<u>定理</u>[21]. Xが有限個の特異値を持つようなLyapunov関数を持つための必要十分条件は$\mathcal{S}_t$がfine filtrationを持つことである.

$f\in\mathcal{D}^r(M)$に対して, Λをfの不変集合とする. このとき, $L_f: M\to R_+$が<u>(f,Λ)のLyapunov関数</u>であるとは; L_fのcritical set $\supset\Lambda$, $L_f(f(x))\leqq L_f(x)$で等号は$x\in\Lambda$のときのみ成立, L_fは少くとも$C^{\dim M+1}$級をみたすことである. 特に$\Lambda=\Omega(f)$のとき<u>fのLyapunov関数</u>という

<u>定理</u>[27]. $f\in\mathcal{D}^r(M)$, $M=M_k\supset\cdots\supset M_1\supset M_0=\phi$ をfのfiltrationとし, $K=\bigcup_{i=1}^{k}K_i$とする. このとき$L_f(K_i)=i$をみたすような(f,K)のLyapunov関数が存在する.

この様にLyapunov関数の性質から力学系の構造をみていく研究をShubは提唱している.

<u>予想</u>3. (Shub, [27]). 力学系は生成的にLyapunov関数

を持つ.

第二章. 保存系について.

保存系の生成性に関してはRobinsonの一連の研究が重要である. 以下にその主なものを中心にして紹介する.

§6. Kupka-Smale型の定理.

Mをm次元のC^∞多様体(compactは仮定しない)とする. Mのvolume Ω (C^∞のnondegenerate n-form)をきめておく. そして次の様な記号を定義する.

$\mathcal{D}^r_V(M)=\{f\in\mathcal{D}^r(M) \mid f^*\Omega=\Omega$ (即ちfはvolumeを保存する)$\}$,

$\mathcal{X}^r_V(M)=\{X\in\mathcal{X}^r(M) \mid L_X\Omega(m)=0\ \forall m\in M$ (即ちXはvolumeを保つ)$\}$,

$\mathcal{H}^r(p)=\{f\in\mathcal{D}^r_V(M) \mid f$の周期$p$以下の周期点はすべて双曲形$\}$,

$\mathcal{H}^r=\bigcap_{p=1}^\infty\mathcal{H}^r(p)$,

$\mathcal{G}^r(p)=\{X\in\mathcal{X}^r_V \mid X$の特異点と周期$p$以下の周期軌道は双曲形$\}$,

$\mathcal{G}^r=\bigcap_{p=1}^\infty\mathcal{G}^r(p)$.

$\mathcal{D}^r_V(M)$, $\mathcal{X}^r_V(M)$はBaire空間である[23]. この時, 次が成立する.

<u>定理</u>9. (Robinson [23]). $1\leqq r\leqq\infty$とする.

(i) $\dim M\geqq 3$ ならば, $\mathcal{H}^r(p)$は$\mathcal{D}^r_V(M)$の中でopen, denseである, 従って$\mathcal{H}^r$は$\mathcal{D}^r_V(M)$で生成的である.

(ii) $\dim M \geqq 4$ ならば，$\mathcal{J}^r(p)$ は $\mathfrak{X}^r_V(M)$ の中で open, dense である，従って $\mathcal{J}^r$ は $\mathfrak{X}^r_V(M)$ に於て生成的である．

(M, ω) を symplectic 多様体とする（即ち M は $2n$ 次元の C^∞ 多様体，ω は nondegenerate closed 2-form）．

$$\mathrm{Sym}^r(M) = \{f \in \mathcal{D}^r(M) \mid f^*\omega = \omega\}$$

とおけば，これは Baire 空間である [23]．ω が nondegenerate より，ω により bundle 同型 $TM \to TM$ $(v \longmapsto 2\omega(v, \cdot))$ が引き起こされる．この同型により C^r sections $C^r(TM) = \mathfrak{X}^r(M)$ と $C^r(T^*M)$ の同型が得られる．C^{r+1} 級の関数 $H : M \to \mathbb{R}$ に対して，$dH \in C^r(T^*M)$ に対応する $X_H \in \mathfrak{X}^r(M)$ を Hamiltonian ベクトル場という．$\mathfrak{X}^r_H(M)$ で C^r 級 Hamiltonian ベクトル場全体の空間をあらわす．$\mathfrak{X}^r_H(M)$ は Baire 空間である [23]．$H^{-1}(e) = \{m \in M \mid H(m) = e\}$ を X_H の energy 曲面という．

$f \in \mathrm{Sym}^r(M)$，m は f の周期点とし，周期を p とする．すると $T_m f^p$ は symplectic，その固有値として λ があれば，$\frac{1}{\lambda}, \bar{\lambda}, \frac{1}{\bar{\lambda}}$ も固有値となり mutiplicity は等しい．principal 固有値を絶対値が 1 より大か，又は絶対値 1 で虚数部分が 0 以上の n 個から成る固有値の集合として定義する（固有値が 1, −1 のものは重複度が偶数だから，各々その半分を取る）．同様に Hamiltonian ベクトル場の特異点の principal characteristic multiplier

を $\exp(T_m X)$ を使って定義する. $X_H \in \mathfrak{X}_H^r(M)$ の周期軌道が周期 τ を持つとき, $T_m \varphi_\tau$ は symplectic である. 固有値1がベクトル方向に対して存在し, 又エネルギーHの増加方向にも固有値1が存在する. <u>周期軌道の principal characteristic multipliers</u> を残りの $(2n-2)$ 個の固有値の半分として上と同様に定義する.

周期点, 特異点, 周期軌道が <u>elementary</u> (又は <u>N-elementary</u>, $N \geqq 1$) であるとは principal 固有値又は characteristic multipliers が整数上で乗法的に独立であること(又は $-N$ と N の間で乗法的に独立であること)である. 即ち, $\prod a_i^{p_i} = 1$ $(-N \leqq p_i \leqq N) \Rightarrow p_i = 0 \ \forall i$. このとき次の部分集合を定義する. このとき次の記号を定義する.

$\mathcal{E}^r(p, N) = \{f \in Sym^r(M) \mid$ 周期 $\leqq p$ の任意の点は N-elementary$\}$,

$\mathcal{E}^r = \bigcap_{p,N} \mathcal{E}^r(p, N)$,

$\mathcal{G}^r(0, N) = \{X \in \mathfrak{X}_H^r(M) \mid X$ の特異点は N-elementary$\}$,

$\mathcal{G}^r(0) = \bigcap_N \mathcal{G}^r(0, N)$,

$\mathcal{G}^r(p, N) = \{X \in \mathfrak{X}_H^r(M) \mid$ 特異点と周期 p 以下の周期軌道は N-elementary$\}$,

$\mathcal{G}^r = \bigcap_{p,N} \mathcal{G}^r(p, N)$.

このとき Robinson は次の結果を示した. これは Abraham-Marsden の問題提起[1]にそった研究である.

<u>定理</u>10. [23]. (M, ω) を symplectic 多様体とする.

(i) $1 \leqq r \leqq \infty$ ならば $\mathcal{E}^r(p, N)$ は $\mathrm{Sym}^r(M)$ で open dense, 従って $\mathcal{E}^r$ は生成的である.

(ii) $1 \leqq r \leqq \infty$ ならば, $\mathcal{G}^r(0, N)$ は $\mathfrak{X}^r_H(M)$ で open dense, 従って $\mathcal{G}^r(0)$ は生成的である.

(iii) $2 \leqq r \leqq \infty$ ならば, $\mathcal{G}^r(p, N)$ と $\mathcal{G}^r$ は生成的である.

又, locally Hamiltonian ベクトル場（即ち, ω を保存するベクトル場, $L_X\omega = 0$）でも (ii), (iii) と同様なことが成立する.

以上の仕事の拡張としての Taken [34] や, geodesic flow に関する生成性についての Klingenberg-Taken [4] の結果がある.

§7. Closing lemma とその応用.

<u>定理</u>11. (保存系の closing lemma, Pugh-Robinson [20]).

M を compact とするとき $\mathcal{D}^1_V(M)$, $\mathfrak{X}^1_V(M)$, $\mathrm{Sym}^1(M)$, $\mathfrak{X}^1_H(M)$ の中で次が成立する; m が力学系 φ の非遊走点とする. N を φ の任意の近傍, $U \subset M$ を m の任意の近傍とするとき, $\varphi' \in N$ と $m' \in U$ が存在して m' は φ' の周期点となる.

<u>定理</u>12. (保存系の general density theorem, Pugh-Robinson [20]).

M を compact とするとき, $\mathcal{D}^1_V(M)$, $\mathfrak{X}^1_V(M)$, $\mathrm{Sym}^1(M)$, $\mathfrak{X}^1_H(M)$ に於て, 次の性質は生成的である; $\Omega(\varphi) = \overline{\Gamma(\varphi)}$.

Hamiltonian ベクトル場 X の<u>積分</u>とは次の条件をみたす C^1 級関数 $g: M \longrightarrow \mathbb{R}$ である; (i) g は X の流れによって保存される,

(ii) X の energy 曲面の中の任意の開集合で g は定数ではない.

定理 13. (Robinson, [23]). M を compact とするとき, 積分を持たない Hamiltonian ベクトル場は $\mathfrak{X}^r_H(M)$ に生成的に存在する.

§8. 保存系の構造安定性.

$f \in Sym^r(M)$ が $Sym^r(M)$ の中で ε-Ω-stable であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, f の近傍 $N_\varepsilon \subset Sym^r(M)$ が存在して, 任意の $g \in N_\varepsilon$ と f とは $|h - id| < \varepsilon$ なる homeomorphism $h: \Omega(f) \to \Omega(g)$ により Ω-conjugate であることである. 同様に $X \in \mathfrak{X}^r_H$ に対しても ε-Ω-stability が定義される. Ω-stability は上から $|h - id| < \varepsilon$ の条件を除いて与えられる.

定理 14. (Robinson [23]). $1 \leqq r \leqq \infty$, (M, ω) は symplectic 多様体とする. このとき, $Sym^r(M)$, $\mathfrak{X}^r_H(M)$ で次が成立する.

(i) $\dim M \geqq 2 \Rightarrow Sym^r(M)$ の中で ε-Ω-stable な系は稠密でない.
$\dim M = 2 \Rightarrow Sym^r(M)$ の中で Ω-stable な系は稠密でない.

(ii) $\dim M \geqq 4 \Rightarrow \mathfrak{X}^r_H(M)$ の中で ε-Ω-stable な系は稠密でない.
$\dim M = 4 \Rightarrow \mathfrak{X}^r_H(M)$ の中で Ω-stable な系は稠密でない.

次の定理は Newhouse により最近得られた結果である.

定理 15. [11] M を compact, $1 \leqq r \leqq \infty$, $f \in Sym^r(M)$ とする.

このとき，f が $\mathcal{D}^r(M)$ の中で構造安定なのは f が Anosov のときに限る．

§9. 其の他．

1. 保存系の位相力学系が ergodic という性質は生成的であるという Oxtoby-Ulam [12] の結果があり，一方 $X \in \mathcal{X}_H^r(M)$ に対してほとんど全ての energy 曲面に対してその少くとも1つの component 上では X は ergodic であるという性質を X が持たないことは生成的である事を示した Markus-Meyer [7] の結果等がある．但し，M は compact の場合である．

2. homoclinic 点の存在．

$f \in \mathcal{D}^r(M)$ の双曲形周期点 x に対して，$W^s(x) \cap W^u(x)$ に含まれる周期点でない点を，x の <u>homoclinic 点</u> という．

<u>定理</u>16. [35]　M を compact とする．$Sym^1(M)$ 又は $\mathcal{D}_V^1(M)$ に於て，すべての双曲型周期点は homoclinic point を持つという性質は生成的である．

次に M^2 として任意の単純閉曲線は M^2 を2つの領域に分けて一方は有界となるものを考える．

<u>定理</u>17. (McGehee-Meyer [36])．少くとも1つの不動点が homoclinic 点を持つ系は $\mathcal{D}_V^1(M^2)$ で開集合となる．(但し C^1-compact open

topology で考えている.)

参考文献

[1] R. Abraham - J. Marsden, Foundations of Mechanics, Benjamin, Inc., N.Y., 1967.

[2] J. Arraut, Note on structural stability, Bull. A.M.S. 72 (1966), 542-544.

[3] M. Hirsch - C. Pugh, Stable manifolds and hyperbolic Sets, Proc. Symp. Pure Math. 14, A.M.S (1970), 133-165.

[4] W. Klingenberg - F. Takens, Generic properties of geodesic flows, Math. Ann. 197 (1972), 323-334.

[5] I. Kupka, Contribution à la théorie des champs génériques, Contributions Diff. Eq. 2 (1963), 457-484; vol. 3 (1964), 411-420.

[6] A. Manning, Axiom A diffeomorphisms have rational zeta functions, Bull. London Math. Soc. 3 (1971), 215-220.

[7] L. Markus - K. Meyer, Generic Hamiltonian dynamical systems are neither integrable nor ergodic, Memoirs of A.M.S. 144 (1974).

[8] P. Mendes, On stability of dynamical systems on open

manifolds, J. Diff. Eq. 16 (1974), 144-167.

[9] S. Newhouse-J. Palis, Bifurcations of Morse-Smale dynamical systems, to appear.

[10] ——-——, Cycles and bifurcation theory, to appear.

[11] S. E. Newhouse, Quasi-elliptic periodic points in conservative dynamical systems, to appear.

[12] J. C. Oxtoby-S. M. Ulam, Measure-preserving homeomorphisms and metric transitivity, Ann. of Math, 42 (1941), 874-920.

[13] J. Palis-M. Shub-D. Sullivan, Genericity theorems in topological dynamics, to appear.

[14] M. M. Peixoto, Structural stability on two dimensional manifolds, Topology 1 (1962), 101-120.

[15] M. M. Peixoto, On approximation theorem of Kupka and Smale, J. Diff. Eq. 3 (1966), 214-227.

[16] ——, Qualitative theory of differential equations and structural stability, Inter. Sym. on Nonlinear Diff. Eq. and Nonlinear Mecha. Academic Press. N.Y. 1967, 469-480.

[17] ——-Pugh, Structurally stable systems on open manifolds are never dense, Ann. of Math. 87 (1968), 423-430.

[18] C. C. Pugh, On improved closing lemma and general density theorem, Amer. J. Math. 89 (1967), 1010-1021.

[19] C.C. Pugh, Against the C^2 closing lemma, J. Diff. Eq. 17 (1975), 435-443.

[20] —— - R.C. Robinson, The C^1 closing lemma, including Hamiltonians, to appear.

[21] C.C. Pugh - M. Shub, The Ω-stability theorem for flows, Invent. Math. 11 (1970), 150-158.

[22] J. Robbin, A structural stability theorem, Ann. of Math. 94 (1971), 447-493.

[23] R.C. Robinson, Generic properties of conservative systems I, II, Amer. J. Math. 92 (1970), 562-603, 897-906.

[24] ——, Structural stability of C^1 diffeomorphisms, to appear.

[25] ——, Structural stability of C^1 flows, to appear.

[26] M. Shub, Structurally stable diffeomorphisms are dense, Bull. A.M.S. 78 (1972), 817-818.

[27] ——, Stability and genericity for diffeomorphisms, Dynamical systems, ed. M. Peixoto, Academic Press, N.Y., 1973, 493-514.

[28] —— - S. Smale, Beyond hyperbolicity, Ann. of Math. 95 (1972), 587-591.

[29] C.P. Simon, On a classification of a Baire set of diffeomorphisms, Bull. A.M.S. 77 (1971), 783-787.

[30] S. Smale, Stable manifolds for differentiable equations, Ann. Scuola Normale 18 (1963).

[31] Smale, The Ω-stability theorem, Proc. Symp. Pure Math. 14 A.M.S. (1970), 289-298.

[32] J. Sotomayor, Generic one-parameter families of vector fields on two-dimensional manifolds, Bull. A.M.S. 74 (1968), 722-726.

[33] ——, Generic bifurcations of dynamical systems, Dynamical systems, ed. M. Peixoto, Academic Press, N.Y., 1973, 561-582.

[34] F. Takens, Hamilonian systems: Generic properties of closed orbits and local perturbations, Math. Ann. 188 (1970), 304-312.

[35] ——, Homoclinic points in conservative systems, Inv. Math. 18 (1972).

[36] R. McGehee - K. Meyer, Homoclinic points of area preserving diffeomorphisms, Amer. J. Math. 96 (1974), 409-420.